4.2 Lebegova Teorema monotone konvergencije. Lema Fatua

Teorema 4.2. (Lebegova teorema monotone konvergencije.)
Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa merom i neka je $(f_n)_n$ niz merljivih funkcija na X sa osobinama

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty \quad \text{za svako } x \in X; \tag{4.2}$$

$$f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty, \quad \text{za svako } x \in X. \tag{4.3}$$

Tada važi:

i) f je merljiva funkcija

ii) $\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu,\ \ n \to \infty.$

Dokaz: i) Na osnovu Teoreme 1.6 sledi da je f merljiva funkcija.
ii) Kako je

$$\int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f_{n+1} d\mu,\ n \in \mathbf{N},$$

sledi

$$\int\limits_X f_n d\mu \to \alpha \in [0, \infty],\ n \to \infty.$$

Kako je $f_n \leq f$, $n \in \mathbf{N}$, sledi

$$\int f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu,\ n \in \mathbf{N}, \ \text{ odnosno } \ \alpha \leq \int\limits_X f d\mu.$$

Ako dokažemo $\int\limits_X f d\mu \leq \alpha$, dokaz će biti kompletiran.

Neka je s jednostavna merljiva funkcija, $0 \leq s \leq f$, i $c \in (0, 1)$. Definišimo:

$$E_n = \{x \in X | f_n(x) \geq cs(x)\},\ \ n \in \mathbf{N}.$$

Kako su f_n i s merljive funkcije i $E_n = (f_n - cs)^{-1}([0, \infty])$, sledi da je E_n merljiv skup.

Važi $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq$. Dokažimo da je $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Neka je $x \in X$ proizvoljno.
Ako je $f(x) = 0$ tada je i $s(x) = 0$ i $f_n(x) = 0$ te $x \in E_1$.